Josef Länger, Helmut Maletzke, St.Pölten

Kegelschnittlinien im Unterricht der AHS

Warum Beschäftigung mit Kegelschnittlinien ?

Bei Betrachtung der Geschichte der Mathematik fällt auf, daß die meisten Mathematiker der Antike Geometer waren. Diese Epoche gilt als Blütezeit der Geometrie. Schon zu dieser Zeit beschäftigte man sich mit den Kegelschnitten, sie sind also ein klassisches Element der Mathematik.

In älteren Lehrplänen kam es jedoch zu einer Überbetonung der Kegelschnittlinien: die Fülle von eher komplizierten Aufgaben stand in keiner Relation zum Stellenwert innerhalb der Mathematik. So gab es beispielsweise sehr viele Theoriebeispiele: das Erkennen der Kegelschnittlinien bei beliebiger Lage im Koordinatensystem, wobei es darum ging, aus der Kenngröße mit 6 Variablen die Art des Kegelschnittes festzustellen. Der theoretische Hintergrund sind Schiebungen und Drehungen, die die Kegelschnittlinie in die 1. Hauptlage bringt. In neueren Lehrplänen ist die Behandlung auf die 1. Hauptlage beschränkt, im neuesten Lehrplan ist von "exemplarischer Behandlung der Kegelschnitte in 1. Hauptlage" die Rede. Es darf die gleiche Entwicklung wie bei der Mengenlehre erwartet werden: nach Übertreibung eine Zurückdrängung auf brauchbares Maß!

Zur Anwendung der Kegelschnittlinien und zu Verbindungen mit anderen Kapiteln des Lehrplanes ist festzuhalten: bei der Berechnung von Volumina von Drehkörpern können die Kegelschnitte vorteilhaft herangezogen werden, da x^2 und y^2 in den Gleichungen schon direkt vorkommen und die meist schwierige Integration erleichtert wird. Drehkörper, die durch Rotation einer Kegelschnittlinie entstehen oder Teile solcher sind, kommen in der Praxis auch wirklich vor. Bei der Hyperbel kann man zum Beweis der asymptotischen Annäherung nun den Grenzwertbegriff anwenden und somit wertvolle Zusammenhänge von bisher einzeln dastehenden Kapiteln herstellen.

Zuletzt sollte nicht unerwähnt bleiben, daß Kegelschnittlinien auch in der Physik vorkommen: die Entdeckung der elliptischen Planetenbahnen durch Kepler stellt eines der bedeutendsten Kapiteln in der Geschichte der Wissenschaften dar. Die Wurfparabel wird dadurch verständlich, daß es sich um eine Überlagerung einer linearen Bewegung und einer beschleunigten Bewegung handelt (Weg ist einmal proportional zur Zeit, einmal zum Quadrat der Zeit). In der Strömungslehre kommt man auf ein parabolisches Geschwindigkeitsprofil. Allseits bekannt ist auch der Unterschied der Reflexion an einem Kugelspiegel und einem Parabolspiegel (Katakaustik, Scheinwerfereigenschaft, Autoscheinwerfer). Schließlich seien noch die Lissajuschen Figuren angeführt,welche unter einschränkenden physikalischen Bedingungen als Überlagerung zweier Schwingungen entstehen.

Zum Inhalt der Arbeit:

(1) Entstehung der Kegelschnittlinien als räumliche Schnitte eines Drehkegels.
(2) Planimetrische Definitionen der Kegelschnittlinien und deren Grundeigenschaften.
(3) Zusammenhänge zwischen räumlichen Schnitten und den Brennpunkteigenschaften.
(4) Analytische Behandlung der Kegelschnittlinien in 1. Hauptlage.
(5) Affinität zwischen Ellipse und deren Hauptscheitelkreis.
(6) Die drei Grundaufgaben der Kegelschnittlinien.
(7) Berechnung der Tangenten an Kegelschnittlinien.
(8) Auswahl von Beispielen der Analytischen Geometrie der Kegelschnittlinien in 1. Hauptlage.
(9) Berechnung von Flächen und Volumina durch Integrale
(10) Musterbeispiele der Kegelschnittlinien aus der Darstellenden Geometrie.

Bestellung der Schrift "Die Kegelschnittlinien im Unterricht der AHS":

Bei Interesse besteht die Möglichkeit der Bestellung bei folgender Kontaktadresse: Prof. Helmut Maletzke c/o BG/BRG St. Pölten, Josefstraße 84, 3100 St.Pölten. (Unkostenbeitrag S 40,--).

(3) Zusammenhang zwischen räumlichen Schnitten und den Brennpunktsdefinitionen

Man erhält die Schnittkurve punkteweise, wenn man jede Erzeugende s mit der Schnittebene ε schneidet.

Ist $s \parallel \varepsilon$, so erhält man einen Fernpunkt der Schnittkurve. Die zu ε parallelen Erzeugenden liegen in der durch die Kegelspitze S gehenden Parallelebene $\overline{\varepsilon}$ von ε.

Somit gilt:

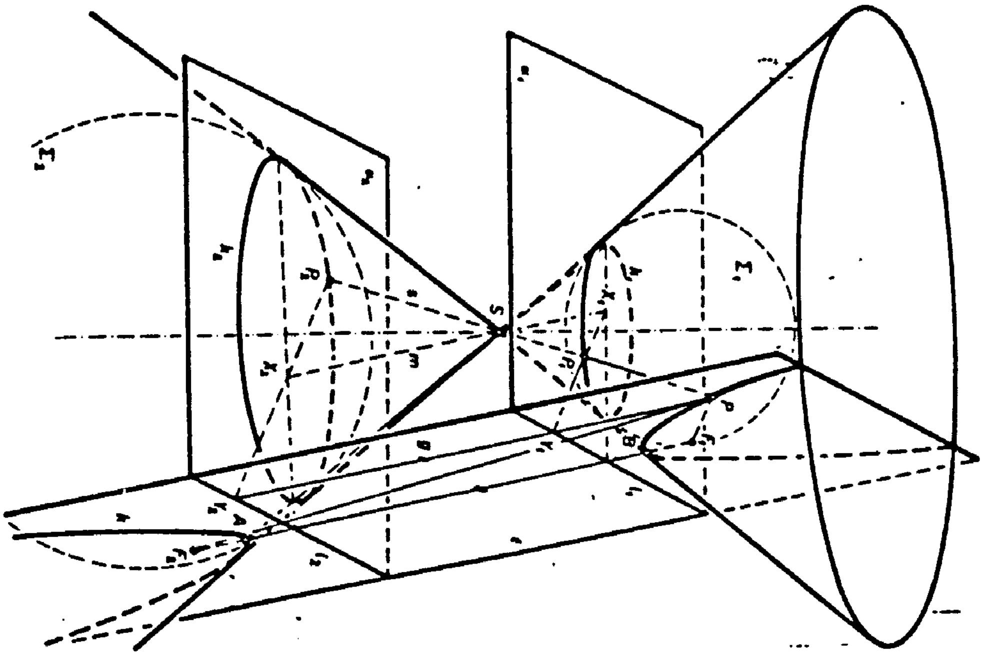
1. Fall : ε ist flacher als die Erzeugenden.
$\Rightarrow$ $\overline{\varepsilon}$ hat mit dem Kegel nur S gemeinsam
$\Rightarrow$ Kurve hat keinen Fernpunkt .... E l l i p s e

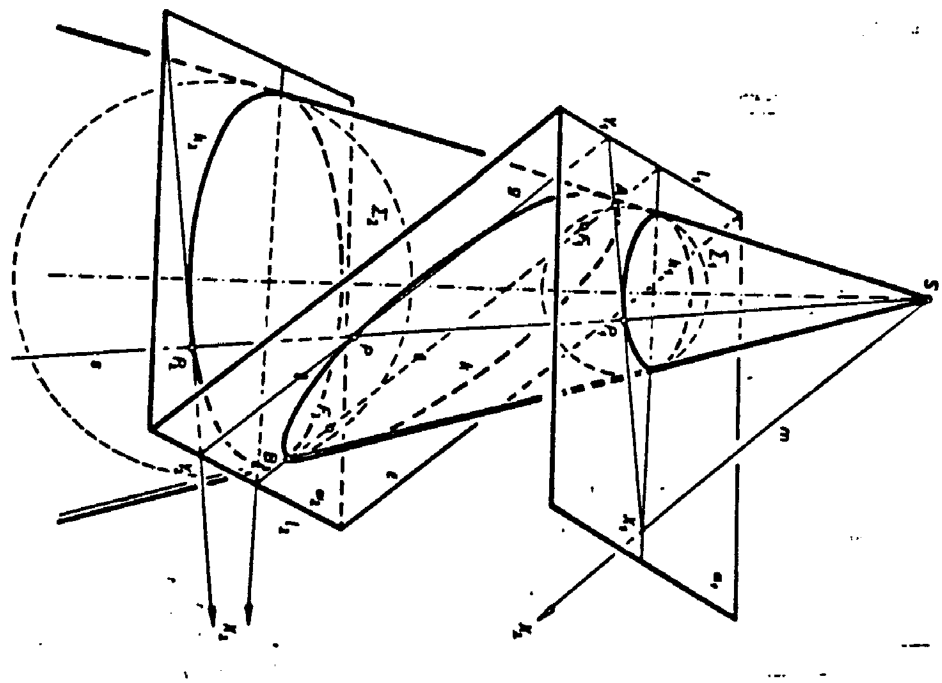
2. Fall : ε ist steiler als die Erzeugenden.
$\Rightarrow$ $\overline{\varepsilon}$ hat mit dem Kegel genau 2 Erzeugenden gemeinsam;
Kurve hat 2 Fernpunkte .... H y p e r b e l

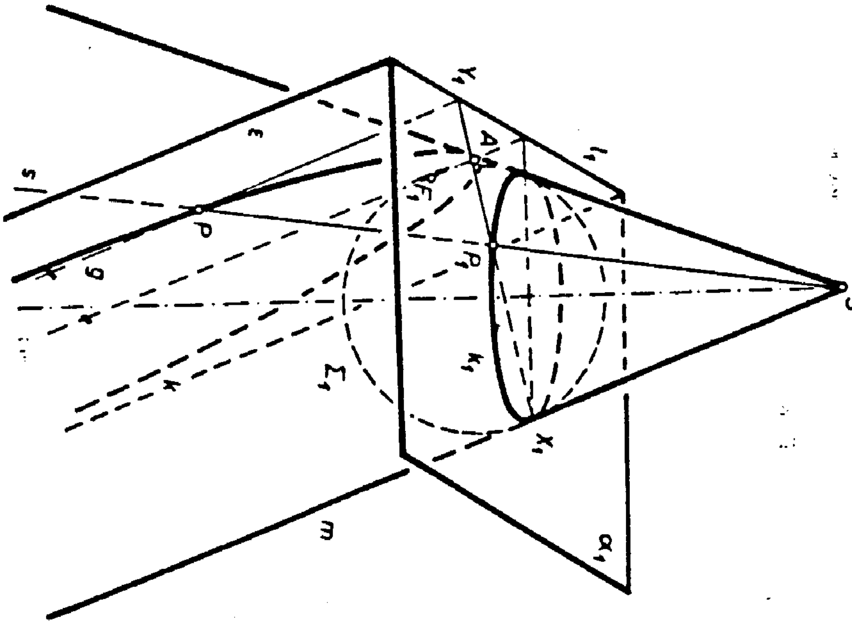
3. Fall : ε ist gleichgeneigt wie die Erzeugenden.
$\Rightarrow$ $\overline{\varepsilon}$ ist die Tangentialebene an den Kegel und enthält genau eine Erzeugende.
$\Rightarrow$ Kurve hat genau einen Fernpunkt .... P a r a b e l

Bemerkung: Da zwischem dem Punktfeld der Basisebene und jenem von ε perspektive Kollineation mit dem Zentrum S herrscht, wird dem Basiskreis des Kegels die Schnittkurve zugeordnet. Das bedeutet, daß jeder ebene Kegelschnitt das perspektiv kollineare Bild eines Kreises ist.

Pierre Germinal DANDELIN (1794-1847/1825): Dandelin war belgischer Mathematiker französischer Herkunft. Er war Offizier und Festungsbaumeister in der belgischen Armee und Universitätsprofessor in Lüttich. Er beschäftigte sich vorwiegend mit geometrischen Problemen. Zur Untersuchung der Kegelschnittlinien und der Erkennung der Art der Kegelschnittlinien bei räumlichen Schnitten eines Drehkegels bediente er sich zur Herleitung eingeschriebener Kugeln. Die DANDELINSCHE KUGELN sind eingeschriebene Kugeln, die einen Kegel und eine durch diesen gelegte Schnittebene berühren.







Laut DANDELIN schreibe man dem Drehkegel Γ Kugeln Σ ein, die auch die Schnittebene ε berühren.
Σ_1 berührt Γ in k_1 und ε in F_1,
Σ_2 berührt Γ in k_2 und ε in F_2.
Die Trägerebenen von k_1 bezw. k_2 heißen α_1 bezw. α_2.
Es gilt $\alpha_1 \parallel \alpha_2$ (zentr.Ähnlichkeit mit Zentrum S).
ε schneidet α_1 in l_1 und α_2 in l_2.
Sind A bezw. B der höchste bezw. tiefste Punkt der Schnittkurve, so sind l_1 und l_2 aus Symmetriegründen normal zu AB.
Die zu AB parallele Gerade m durch S schneide α_1 in X_1 bezw. α_2 in X_2.
Sei s eine beliebige nicht zu ε parallele Erzeugende, so schneidet sie ε im endlichen Punkt P. s und m spannen eine Ebene β auf, welche ε in einer zu AB parallelen Geraden g schneidet.
g enthält den Punkt Y_1 von l_1 und Y_2 von l_2.
$\Rightarrow \overline{Pl_1} = \overline{PY_1}$ und $\overline{Pl_2} = \overline{PY_2}$; s schneidet α_1 in P_1 und α_2 in P_2
Da die Tangentenstrecken aus einem Punkt an eine Kugel gleich lang sind, gelten $\overline{PP_1} = \overline{PF_1}$ und $\overline{PP_2} = \overline{PF_2}$.
$\Rightarrow \overline{PF_1} : \overline{Pl_1} = \overline{PP_1} : \overline{PY_1} = \overline{SP_1} : \overline{SX_1} = \varepsilon = const.$ bzw.
$\overline{PF_2} : \overline{Pl_2} = \overline{PP_2} : \overline{PY_2} = \overline{SP_2} : \overline{SX_2} = \varepsilon$
Aus den Neigungen zueinander ergibt sich für den
1. Fall: $0 < \varepsilon < 1$ .... Ellipse
2. Fall: $\varepsilon = 1$ .... Parabel (hier gilt nur ein Index)
3. Fall: $\varepsilon > 1$ .... Hyperbel

Aus dem Satz von DANDELIN lassen sich sofort die im Mathematikunterricht gebräuchlichen Definitionen der Kegelschnitte herleiten:
1. Fall: $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PP_1} + \overline{PP_2} = \overline{P_1P_2} = 2a = const.$..... Ellipse
2. Fall: $1 = \varepsilon = \overline{PF} : \overline{Pl} \Rightarrow \overline{PF} = \overline{Pl}$ ..... Parabel
3. Fall: $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = |\overline{PP_1} - \overline{PP_2}| = \overline{P_1P_2} = 2a = const.$..... Hyperbel

<u>Zusammenfassung:</u> Die Schnittkurven k wurden dreimal definiert:
1) nach Lage der Richtebene (siehe § 1)
2) durch die Kenngröße ε
3) Brennpunktdefinition

Bemerkungen:

Die erste Definition der Kegelschnittlinien liefert nicht jene Punktmengen, die die zweite bzw. dritte Definition liefert, denn letztere beschreiben nur endliche Punkte (im Anschauungsraum), während die erste Definition den projektiv abgeschlossenen Anschauungsraum benützt (mit Fernpunkten). Im Hyperbel- bzw. Parabelfall fehlen somit bei Definition 2 und 3 ein bzw. zwei Punkte zu jener Punktmenge, die durch Definition 1 beschrieben wird.

WIE GROSS IST ε?

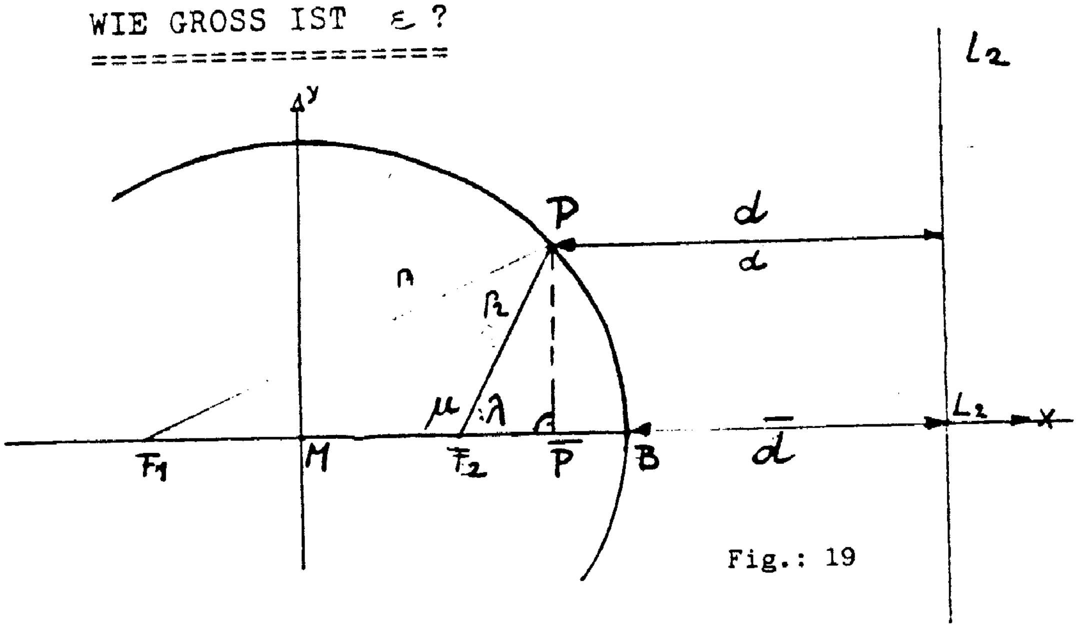


Fig.: 19

Sei $P(x/y)$ ein beliebiger Punkt der Ellipse und $\bar{P}(x/0)$; $x>e$.

$\overline{PF_1} = r_1$ $\quad \overline{Pl_2} = d$ $\quad \lambda = \sphericalangle\, r_2 x^+$

$\overline{PF_2} = r_2$ $\quad \overline{Bl_2} = \bar{d}$ $\quad \mu = 180^\circ - \lambda$

Im rechtwinkeligen Dreieck $F_2\bar{P}P$ gilt: $\cos\lambda = \dfrac{x-e}{r_2}$

$$\Rightarrow \cos\mu = \frac{e-x}{r_2} \qquad (1)$$

Wendet man im Dreieck F_1F_2P den cos-Satz an, so erhält

man $\quad r_1^2 = r_2^2 + (2e)^2 - 2r_2 2e\cos\mu$

also (1) $\quad r_1^2 = r_2^2 + 4e^2 - 4er_2\dfrac{e-x}{r_2}$

$$r_1^2 = r_2^2 + 4e^2 + 4e(e-x)$$

$$r_1^2 = r_2^2 + 4e^2 + 4ex - 4e^2$$

$$r_1^2 = r_2^2 + 4ex$$

$$r_1^2 - r_2^2 = 4ex$$

$$(r_1 - r_2)\cdot(r_1 + r_2) = 4ex \qquad (2)$$

Da $r_1 + r_2 = 2a$ (Def 3) folgt

$$r_1 - r_2 = 2x\frac{e}{a} \qquad (3)$$

(2) und (3) bilden ein lineares Gleichungssystem für r_1 und r_2; dessen Lösungen lauten

$$r_1 = a + \frac{e}{a}x$$

$$r_2 = a - \frac{e}{a}x \qquad (4)$$

Laut DANDELIN ist $\varepsilon = \dfrac{r_2}{d}$ also $d\varepsilon = r_2$ (5)

Speziell für C oder D ergibt sich $(\bar{d} + a)\cdot\varepsilon = a$ (6)

Es gilt: $d = \bar{d} + (a - x)$ (siehe Skizze)

$$d\varepsilon = (\bar{d} + a - x)\varepsilon$$

(5) $r_2 = (\bar{d} + a - x)\varepsilon$

(4) $a - \frac{e}{a}x = (\bar{d} + a - x)\varepsilon$

$$a - \frac{e}{a}x = (\bar{d} + a)\varepsilon - x\varepsilon$$

(6) $a - \frac{e}{a}x = a - x\varepsilon$

$$-\frac{e}{a}x = -x\varepsilon$$

$$\underline{\underline{\varepsilon = \frac{e}{a}}}$$

Analoges ergibt sich für $x \leq e$.

(6) $\bar{d} = \frac{a}{\varepsilon} - a = \frac{a^2}{e} - a$

$$\bar{d} + a = \frac{a^2}{e}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{l_{1,2} : y = \pm \frac{a^2}{e}}}$$

l_1 und l_2 sind also durch $y : a = a : e$ konstruierbar.
Für die Hyperbel läßt sich analog zeigen: $\varepsilon = \frac{e}{a}$
Für die Parabel gilt laut DANDELIN $\varepsilon = 1$, also $\overline{PF} = \overline{PL}$,
was mit der elementaren Brennpunktdefinition übereinstimmt.

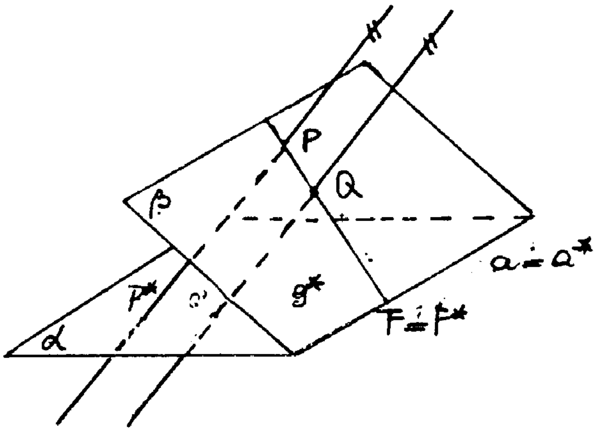
(5) Affinität zwischen Ellipse und deren Hauptscheitelkreis(Nebenscheitekreis)

Definitionen

1) räumliche perspektive Affinität

Werden zwei ebene Punktfelder α, β durch Parallelprojektion auf einander bezogen, so heißt die Punkteverwandtschaft räumliche perspektive Affinität.

Fig. 27



einige Eigenschaften:

Geradentreue (Geraden werden in Geraden transformiert)

Zugeordnete Geraden schneiden einander auf einer festen Geraden a, der Affinitätsachse.

Inzidenztreue ($P \in g \Rightarrow P^* \in g^*$)

bijektiv

$\overline{P^*F^*} = k \cdot \overline{PF}$ (k const. für alle P - wegen 1. Strahlensatzes)

2) ebene perspektive Affinität

Wird eine räumliche perspektive Affinität $P \mapsto P^*$ durch Parallelprojektion abgebildet, so heißt die durch diese Affinität induzierte Punktezuordnung $P^s \mapsto P^{*s}$ in der Bildebene eine ebene perspektive Affinität.

Bemerkung: Selbstverständlich darf die Parallelprojektion α oder β nicht projizierend machen.

einige Eigenschaften:

Zugeordnete Punkte liegen auf Parallelen (diese heißen "Affinitätsstrahlen")

Geradentreue

Zugeordnete Geraden schneiden einander auf einer festen Achse a^s ("Affinitätsachse")

Inzidenztreue

bijektiv

$\overline{P^{*s}F^{*s}} = \bar{k} \cdot \overline{P^sF^s}$ ($\bar{k}$ const für alle P)

Angabe z.B. durch Achse und ein Paar zugeordneter Punkte.

Für unsere Aufgabe wählen wir nun (in abgeänderter Bezeichnung) speziell als Affinitätsachse die x-Achse unseres Koordinatensystems, die y-Richtung als Affinitätsrichtung und als Faktor $k = \frac{b}{a}$ (a, b ... Halbachsenlängen der Ellipse)

Für $P(x/y) \mapsto P^*(x^*/y^*)$ ergeben sich somit die Transformationsgleichungen:

$$x^* = x$$
$$y^* = \frac{b}{a} y$$

Nun bestimmen wir das affine Bild des Kreises

$k: x^2 + y^2 = a^2$

k^*: Aus obigen Gleichungen folgt: $x = x^*$ und $y = \frac{a}{b} y^*$, also:

$$x^{*2} + \left(\frac{a}{b} y^*\right)^2 = a^2$$
$$x^{*2} + \frac{a^2}{b^2} y^{*2} = a^2$$
$$\frac{x^{*2}}{a^2} + \frac{y^{*2}}{b^2} = 1$$

k^* ist also eine Ellipse mit den Halbachsenlängen a, b.

Ist $a > b$, dann ist k Hauptscheitelkreis von k^*,

bei $a < b$ ist k Nebenscheitelkreis von k^* (2. Hauptlage).

$\Rightarrow$ Eine Ellipse ist perspektiv affin zu ihrem Haupt- und Nebenscheitelkreis.

Bemerkung: Es gilt allgemein (ohne Beweis), daß eine Ellipse zu jedem Kreis mit $b < r < a$ perspektiv affin ist. In den vorherigen Ausführungen wurden die beiden Grenzfälle $r=a$ und $r=b$ behandelt. Da bei Parallelprojektion zwischen ebener Figur und deren Bild perspektive Affinität herrscht, gilt:

Zur Konstruktion $k \mapsto k^*$ verwendet man am besten beide Scheitelkreise

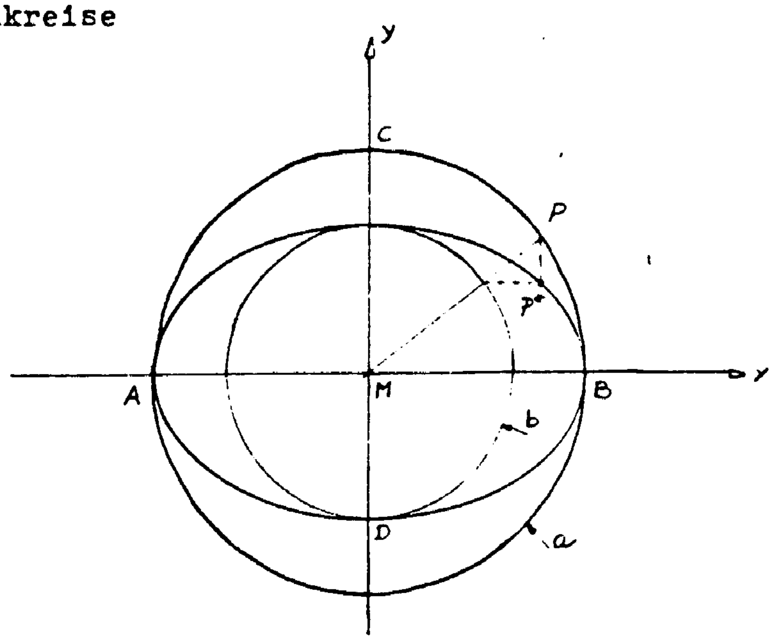


Fig. 28

Zusammenfassung: Tangenten an Kegelschnittlinien

Ellipse	Hyperbel	Parabel
$b^2.x^2 + a^2.y^2 = a^2.b^2$	$b^2.x^2 - a^2.y^2 = a^2.b^2$	$y^2 = 2.p.x = p.(2.x)$
Punkt $T(x_1/x_2)$ auf Ellipse	Punkt T(x1/x29 auf Hyperbel	Punkt $T(x_1/x_2)$ auf Parabel
$b^2.x.x + a^2.y.y = a^2b^2$	$b^2.x.x - a^2.y.y = a^2.b^2$	$y.y = p.\ (x+x)$

Man findet die Gleichungen an eine Kegelschnittlinie in einem Punkt derselben mit Hilfe des Verfahrens der " BILINEARFORM " : die auftretenden Quadrate x^2 und y^2 werden als x.x und y.y dargestellt und bei der Parabel 2.x als Summe x+x . Jeweils eine Variable wird durch die Koordinaten des Berührpunktes ersetzt. Aus den quadratischen Gleichungen der Kegelschnittlinien werden somit lineare Gleichungen von Geraden, welche die Tangenten darstellen.

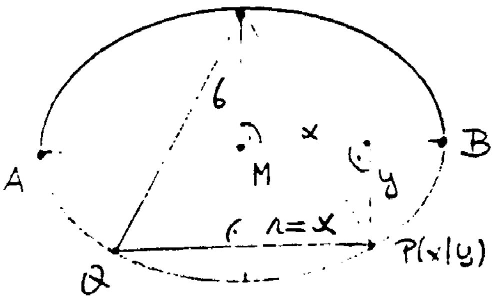
$(b^2.x_1).x + (a^2.y_1).y = a^2.b^2$	$(b^2.x_1).x-(a^2.y_1).y = a^2.b^2$	$y_1.y = p.(x_1+x)$

Beispiele zum Ermitteln von Tangenten durch die Biliearform

$4.x^2 + 25.y^2 = 100$	$9.x^2 - 16.y^2 = 144$	y^2 6 $4.x = 2.(2.x)$
Punkt $T(3/\frac{8}{5})$ auf Ellipse	Punkt $T(5/\frac{9}{4})$ auf Hyperbel	Punkt T(4/4) auf Parabel
$4.x.x + 25.y.y = 100$ $4.3.x + 25.1,6.y = 100$	$9.x.x - 16.y.y = 144$ $9.5.x -16.2,25 = 144$	$y.y = 2.(x+x)$ $4.y = 2.(4+x)$
$12x+40y = 100$	$45.x - 36y = 144$	$2y = 4+x$
$3x + 10y = 25$ =============	$5x - 4y = 16$ ============	$x - 2.y = -4$ ============

(8/9) Der Ellipse $4x^2+y^2=36$ wird ein Dreieck eingeschrieben, dessen Höhe mit der Nebenachse zusammenfällt, dessen Basis parallel zur Hauptachse verläuft und dessen Scheitel in den Nebenscheitel fällt. Bei der Drehung um die y-Achse soll ein Kegel größten Volumens entstehen.

Berechne die Lage der beiden anderen Eckpunkte des Dreieckes,
Abmessungen und Volumen
Verhältnis des Maximalvolumens zum Volumen des Ellipsoides.



$$4x^2+y^2=36$$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}=1 \Rightarrow a=3;\ b=6$$

Analog zu (8/1) Wahl der Variablen x oder y laut Skizze
Grundmenge ergibt sich durch die Abmessungen der Ellipse

$$-3 < x < +3$$

$$-6 < y < -6$$

$$V=\frac{r^2\cdot\pi\cdot h}{3}=\frac{x^2\cdot\pi\cdot(6+y)}{3}=\frac{(36-y^2)}{4}\cdot\frac{\pi}{3}\cdot(6+y)$$

$$\overline{V}=(36-y^2)\cdot(6+y)=216-6y^2+36y-y^3$$

$$\overline{V}'=-12y+36-3y^2=0$$

$$y^2+4y-12=(y-2)\cdot(y+6)=0 \qquad \underline{y=2 \quad x=\sqrt{8}=2\sqrt{2}}$$

$$\underline{P(2\sqrt{2}/-2);\ Q(-2\sqrt{2}/-2);\ C(0/6)}$$

Berechnung des Maximalvolumens :

$$V(max)=\frac{r^2\cdot h}{3}\cdot\pi=\frac{x^2\cdot(6+y)}{3}\cdot\pi=\frac{8\cdot 8}{3}\cdot\pi=\underline{\underline{\frac{64}{3}\pi\,E}}$$

Berechnung des Verhältnisses dieses Maximalvolumens des Kegels zum Volumen des gesamten Ellipsoides bei Drehung um die y-Achse:

$$V=2\cdot\pi\int_0^6\frac{36-y^2}{4}\,dy=\frac{\pi}{2}\cdot\int_0^6(36-y^2)\,dy=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(36y-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^6=F(6)-F(0)=F(6)-0=F(6)=$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\left(216-\frac{216}{3}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 216=\underline{72\pi\,E^3}$$

$$V_K : V_E=\left(\frac{64}{3}\pi\right):(72\pi)=\frac{64}{3}:72=$$

$$=64:(72\cdot 3)=16:(18\cdot 3)=\underline{\underline{8:27}}$$

(9/9) Vom Punkt P(-8/0) werden die Tangenten an die Parabel $y^2=2x$ gelegt. Diese beiden Tangenten, der Parabelbogen und die Gerade x=-1 begrenzen ein Flächenstück, welches um die x-Achse rotiert (Gerade x=5).

Berechne das Volumen des Drehkörpers und zeichne seine Querschnittsfläche!

$P(-8/0) \Rightarrow x = -(-8) = 8 \Rightarrow y = 4 \qquad \underline{P_1(8/4)\ P_2(8/-4)}$

$\Rightarrow k = \pm \frac{4}{16} = \pm \frac{1}{4} \Rightarrow d = \pm 2 \qquad \underline{t_1:\ y = \frac{1}{4}x + 2}$

$\frac{1}{4}x + 2 = 0 \Rightarrow \underline{P(-8/0)} \qquad \underline{t_2:\ y = -\frac{1}{4}x - 2}$

$x = 0 \Rightarrow \underline{H(5/0)\ \ H_2(-2/0)}$

$\underline{V_1} = \pi \cdot \int_0^5 2x\,dx = \pi x^2 \Big|_0^5 = \underline{25\pi E^2}$

$V_2 = \frac{\pi h}{3} \cdot (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$

$V_2 = \frac{\pi \cdot 6}{3} \cdot \left(\frac{49}{16} + \frac{7}{4} \cdot \frac{13}{4} + \frac{169}{16}\right)$

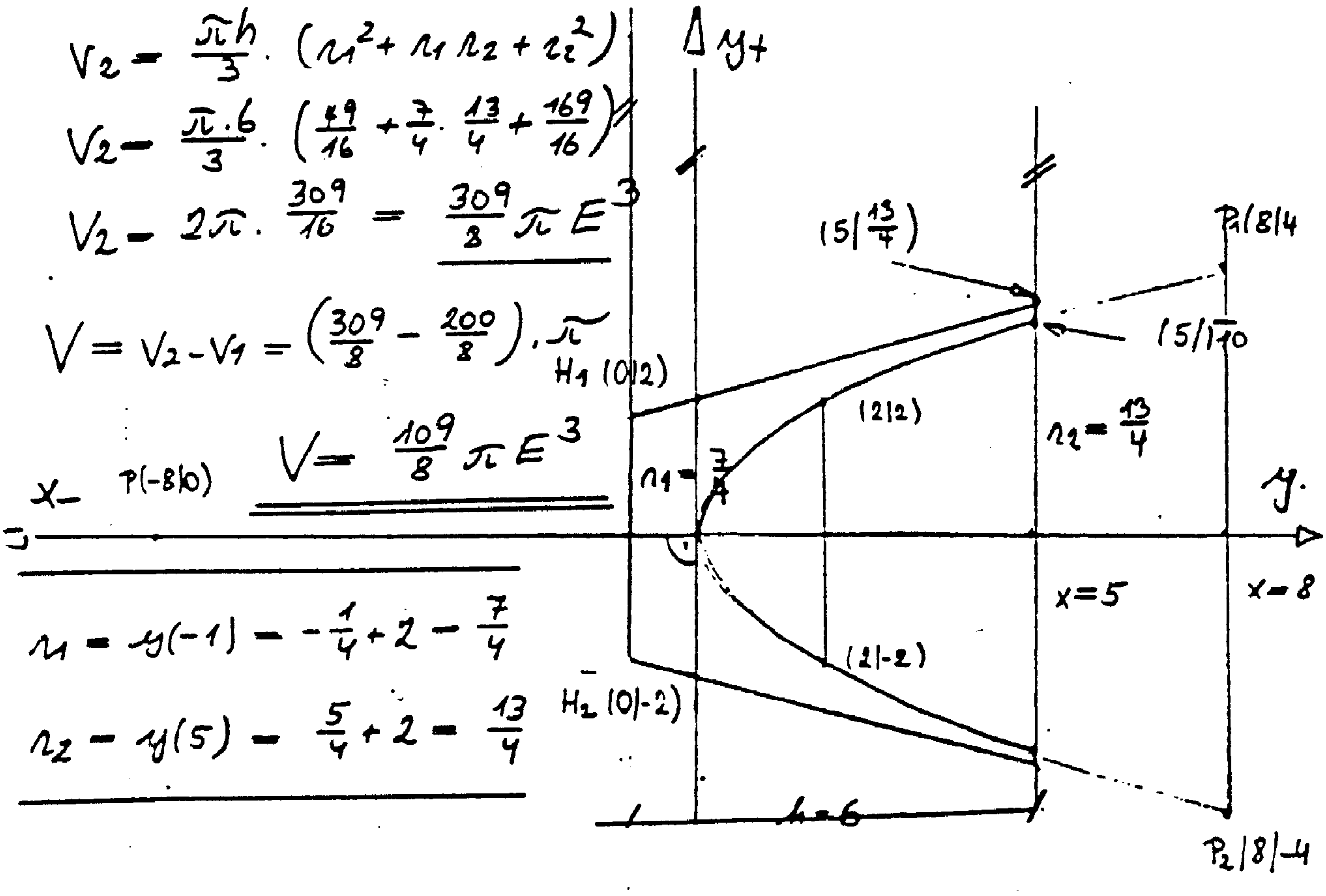
$V_2 = 2\pi \cdot \frac{309}{16} = \underline{\frac{309}{8}\pi E^3}$

$V = V_2 - V_1 = \left(\frac{309}{8} - \frac{200}{8}\right) \cdot \pi$

$\underline{\underline{V = \frac{109}{8}\pi E^3}}$

$r_1 = y(-1) = -\frac{1}{4} + 2 = \frac{7}{4}$

$r_2 = y(5) = \frac{5}{4} + 2 = \frac{13}{4}$



2. Ebene Kegelschnitte - Schulbeispiele in Normaler Axonometrie

a) Der auf der $[xy]$-Ebene ruhende Drehkegel $\Gamma\,[M=O, r=5, h=9]$ ist mit der Ebene $\varepsilon(\infty/6/3)$ zu schneiden. Der entstehende Kegelstumpf ist in normaler Axonometrie($\sphericalangle x^n z^n = 115°$, $\sphericalangle y^n z^n = 110°$) darzustellen !

1) Zeichnen der Koordinatenachsenbilder und der Einschneiderisse.

2) Eintragen der Bilder von Γ und ε. ε ist flacher als Erzeugende $\Rightarrow$ Schnittkurve k ist eine Ellipse.

3) NA-Bild des Basiskreises: Hauptachse der Bildellipse normal z^n durch O^n (a = Radius = 5). Schnittpunkt der durch die Hauptscheitel parallel verschobenen Achsen x^n und y^n liefert allgemeinen Ellipsenpunkt. Mit Papierstreifenkonstruktion (kinematische Erzeugung der Ellipse) Nebenachsenlänge ermitteln. Krümmungskreise.

4) Umrißerzeugende: S^n durch Einschneiden ermitteln. Umrißerzeugende sind Tangenten aus S^n an das Basiskreisbild. Dazu verwendet man günstigerweise Affinität (mit Achse z^n). Die Berührungspunkte heißen U_1^n und U_2^n.

5) ε'' schneidet den Kegelumriß in A'' und B'' (höchster und tiefster Punkt von k). A und B sind Hauptscheitel von k und k'.

6) A' und B' (durch Koordinatenübertragen).

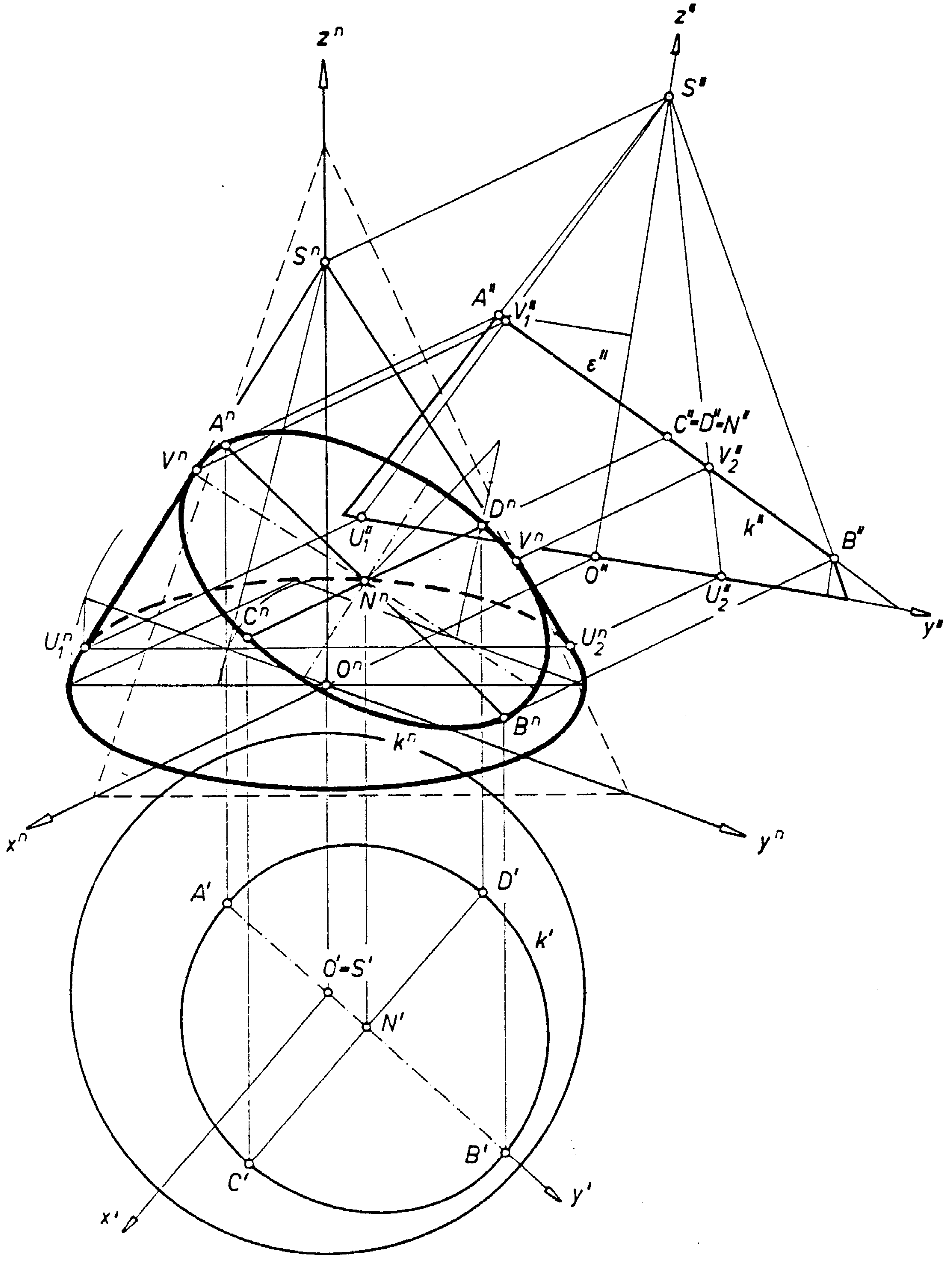
7) Halbierungspunkte von $A'B'$ bezw. $A''B''$ sind Risse des Ellipsenmittelpunktes N.

8) Risse der Nebenscheitel C, D: $C'' = D'' = N''$
C', D' mit Schichtkreis
(oder: S' ist Brennpunkt von k').

9) Umrißpunkte V_1^n, V_2^n: U_1 und U_2 in den Aufriß bringen und die Erzeugenden durch die Punkte U_1'', U_2'' mit ε'' schneiden $\rightarrow V_1'', V_2'' \rightarrow V_1^n, V_2^n$.

10) Ellipsenbild k^n: Durch Einschneiden A^n, B^n, C^n, D^n, N^n. RYTZsche Achsenkonstruktion, Krümmungskreise.

11) Kurven und Umrißerzeugende sichtbarkeitsrichtig nachziehen.



z''
S''
z^n
S^n
A''
V_1''
ε''
A^n
C''=D''=N''
V_2''
V^n
D^n
U_1''
V^n
k''
B''
O''
U_2''
y''
N^n
C^n
U_1^n
U_2^n
O^n
B^n
k^n
x^n
y^n
A'
D'
k'
O'=S'
N'
B'
C'
x'
y'